

Instruktion

Die gebrochen-rationale Funktion



Definition:

Unter einer gebrochen-rationalen Funktion versteht man den Quotienten zweier ganzrationaler Funktionen, d.h. Funktionen der Form

$$f: x \mapsto \frac{a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \dots + a_1 x + a_0}{b_m x^m + b_{m-1} x^{m-1} + \dots + b_1 x + b_0} \quad \text{mit } x \in \mathbb{R} \setminus \{x_1, \dots, x_k\}$$

(wobei $x_1, \dots, x_k$ Nullstellen der ganzrationalen Funktion im Nenner sind), $a_n \neq 0$, $b_m \neq 0$.

Der Funktionsterm besteht aus dem Zählerpolynom vom Grad n und dem Nennerpolynom vom Grad m .

Ist $n < m$ ($n \geq m$), so heißt f echt (unecht) gebrochen-rationale Funktion.

1) $f(x) = \frac{3}{(x-1)^2}$ echt gebrochen-rationale Funktion

2) $f(x) = \frac{x^3}{6x-12}$ unecht gebrochen-rationale Funktion

3) $f(x) = \frac{2x^2 - 13x + 20}{x^2 - 7x + 12}$ unecht gebrochen-rationale Funktion

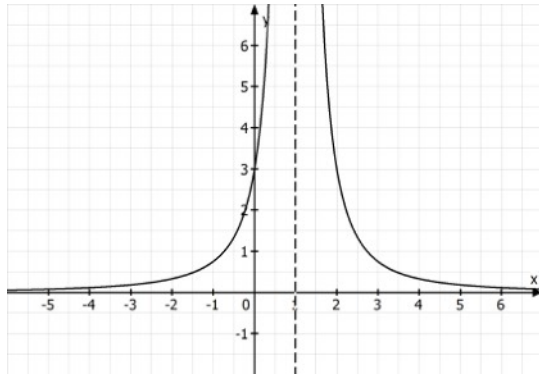
Eigenschaften der gebrochen-rationalen Funktionen

(1) Definitionsmenge:

Der Nenner einer gebrochen-rationalen Funktion darf nie Null werden.

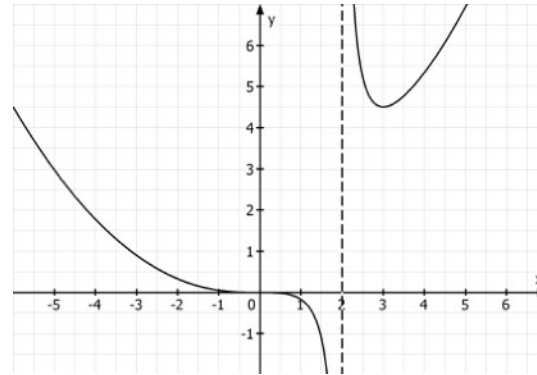
$$1) f(x) = \frac{3}{(x-1)^2}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$$



$$2) f(x) = \frac{x^3}{6x-12}$$

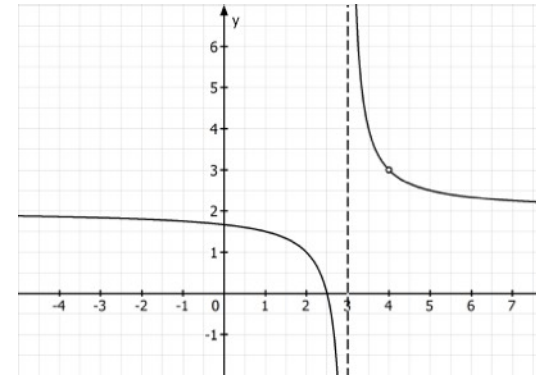
$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$$



$$3) f(x) = \frac{2x^2 - 13x + 20}{x^2 - 7x + 12}$$

$$x^2 - 7x + 12 = 0 \Rightarrow (x-3)(x-4) = 0 \Rightarrow x_1 = 3 \quad x_2 = 4$$

$$\Rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus \{3; 4\}$$



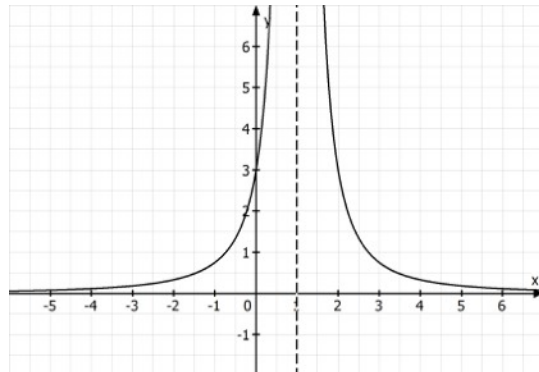
(2) Nullstellen einer gebrochen-rationalen Funktion:

Bedingung: $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)} = 0 \Rightarrow p(x) = 0$

1) $f(x) = \frac{3}{(x-1)^2}$

$$\frac{3}{(x-1)^2} = 0 \Rightarrow 3 = 0 \text{ (f)}$$

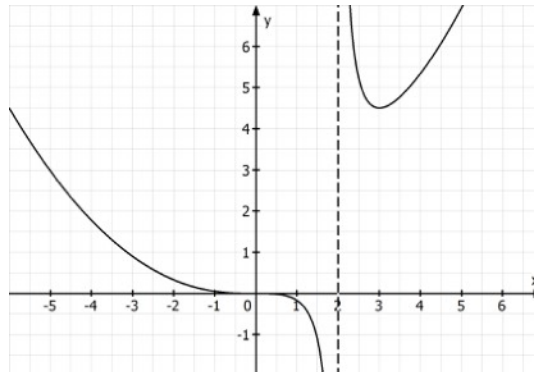
$\Rightarrow f$ hat keine Nullstellen



2) $f(x) = \frac{x^3}{6x-12}$

$$\frac{x^3}{6x-12} = 0 \Rightarrow x^3 = 0$$

$\Rightarrow x = 0$ (dreifache Nullstelle)

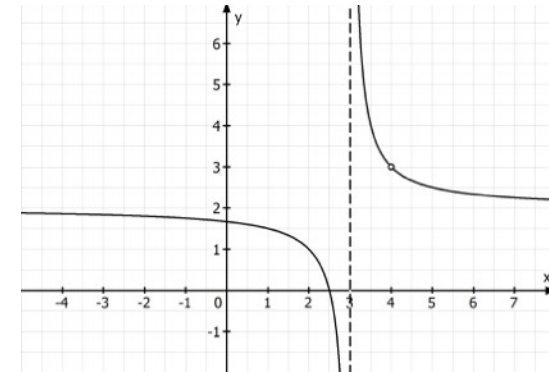


3) $f(x) = \frac{2x^2 - 13x + 20}{x^2 - 7x + 12}$

$$\frac{2x^2 - 13x + 20}{x^2 - 7x + 12} = 0 \Rightarrow 2x^2 - 13x + 20 = 0$$

$$\Rightarrow (x_1 = 4) \notin D_f \quad x_2 = \frac{5}{2}$$

$\Rightarrow f$ hat eine Nullstelle bei $x = \frac{5}{2}$



(3) Stetig behebbare Definitionslücken und Polstellen (Unendlichkeitsstellen):

Lässt sich aus dem Nenner des Funktionsterm einer gebrochen-rationalen Funktion ein Faktor $(x-x_0)^n$ vollständig kürzen, so hat man an dieser Stelle x_0 ein „Loch“ im Funktionsgraphen (stetig behebbare Definitionslücke).

Lässt sich ein Faktor $(x-x_0)^n$ nicht vollständig oder überhaupt nicht aus dem Nenner kürzen, so spricht man von einer Polstelle (Unendlichkeitsstelle) n -ter Ordnung. Im Graphen der gebrochen-rationalen Funktion hat man dann eine Parallele zur y -Achse (senkrechte Asymptote).

1) $f(x) = \frac{3}{(x-1)^2}$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$

$x = 1$ ist eine Polstelle 2. Ordnung (Polstelle ohne Vorzeichenwechsel)

2) $f(x) = \frac{x^3}{6x-12}$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{2\}$

$x = 2$ ist Polstelle 1. Ordnung (Polstelle mit Vorzeichenwechsel)

3) $f(x) = \frac{2x^2 - 13x + 20}{x^2 - 7x + 12} = \frac{2(x - \frac{5}{2})(x - 4)}{(x - 3)(x - 4)}$

$D_f = \mathbb{R} \setminus \{3; 4\}$

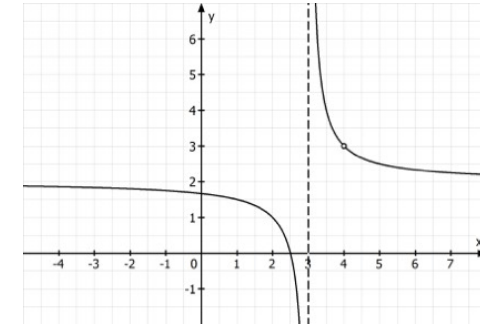
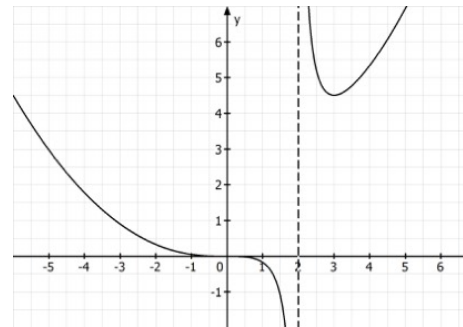
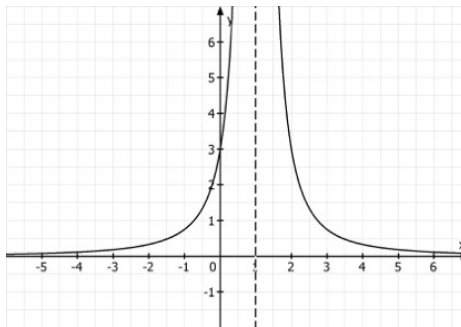
$x = 3$ ist Polstelle 1. Ordnung (Polstelle mit Vorzeichenwechsel)

$x = 4$ ist stetig behebbare Definitionslücke

Unterscheidung Polstelle 1. Ordnung und Polstelle 2. Ordnung:

Polstelle 1. Ordnung: Vorzeichen der Funktionswerte wechselt an der Stelle x_0 .

Polstelle 2. Ordnung: Vorzeichen der Funktionswerte bleiben gleich in der Umgebung von x_0 .



4)
$$f(x) = \frac{(x-3) \cdot (x+1)^2}{(x-3)^2 \cdot (x+1) \cdot (x-0,5)}$$

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \{-1; 0,5; 3\}$$

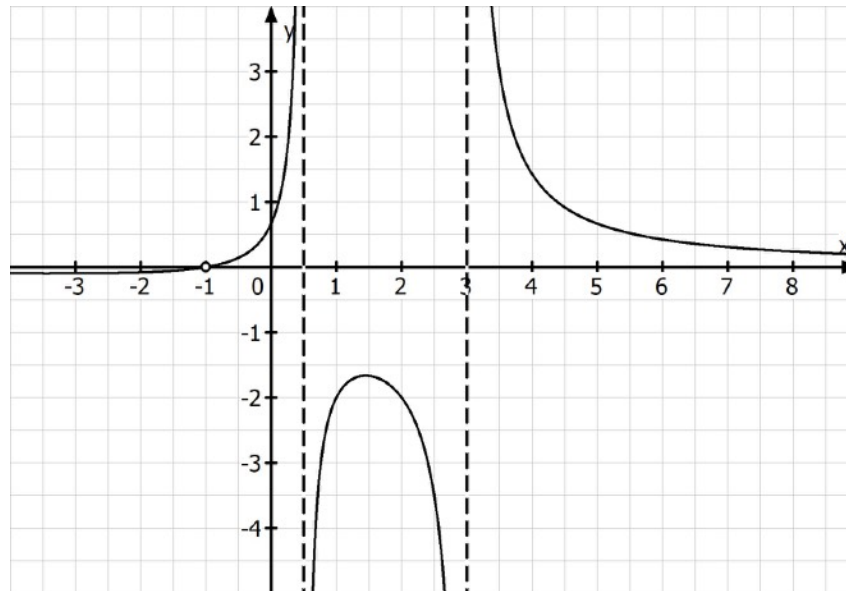
$$f(x) = \frac{x+1}{(x-3) \cdot (x-0,5)}$$

$x = -1$ ist eine stetig behebbare Definitionslücke

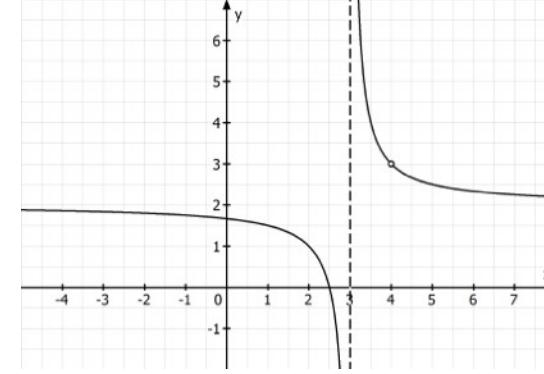
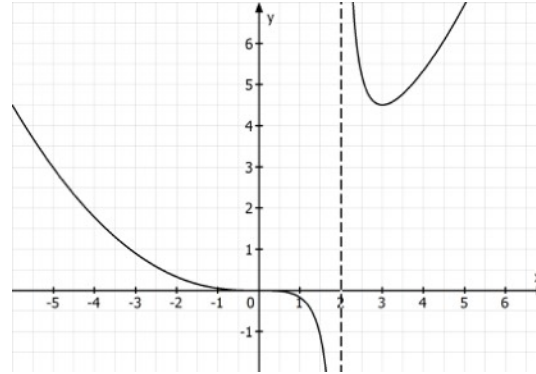
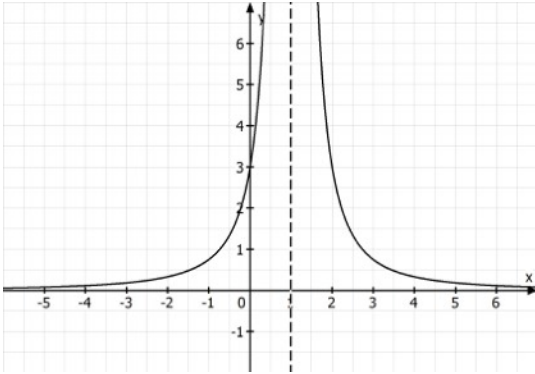
$x = 0,5$ ist eine Polstelle 1. Ordnung (mit VZW)

$x = 3$ ist eine Polstelle 1. Ordnung (mit VZW)

Nullstellen: $f(x) = 0 \Rightarrow x+1=0 \Rightarrow (x=-1) \notin D_f$ f hat keine Nullstellen



(4) Verhalten im Unendlichen (Gleichungen von nichtsenkrechten Asymptoten):



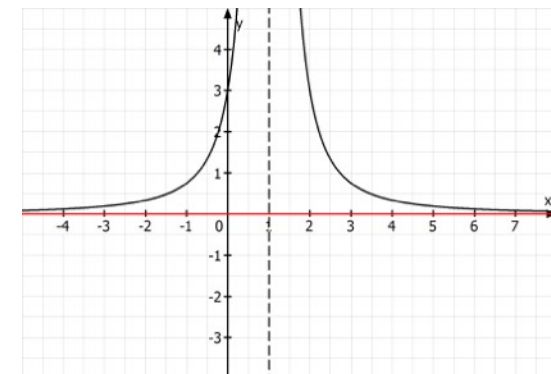
Die Gleichung der nichtsenkrechten Asymptote einer gebrochen-rationalen Funktion hängt vom Grad n der Zählerfunktion und vom Grad m der Nennerfunktion ab.

a) $n < m$: f ist eine echt gebrochen-rationale Funktion

Der Funktionsgraph nähert sich für $x \rightarrow \pm\infty$ immer mehr der x -Achse an.

Die x -Achse ist die waagrechte Asymptote, d.h. $y = 0$

Beispiel: $f(x) = \frac{3}{(x-1)^2}$



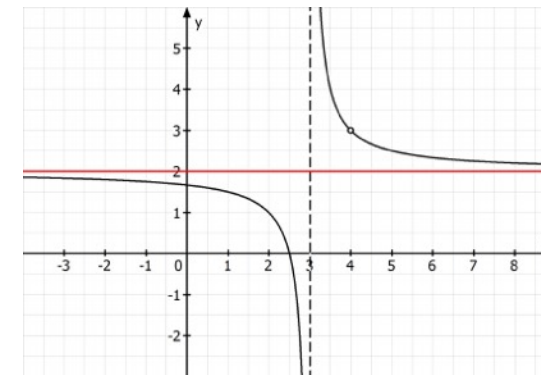
b) $n = m$:

f ist eine unecht gebrochen-rationale Funktion und kann durch Polynomdivision in eine ganzrationale und eine echt gebrochen-rationale Funktion zerlegt werden.

Beispiel: $f(x) = \frac{2x^2 - 13x + 20}{x^2 - 7x + 12}$

$$(2x^2 - 13x + 20) : (x^2 - 7x + 12) = 2 + \underbrace{\frac{x - 4}{x^2 - 7x + 12}}_{\rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \pm\infty}$$

$\Rightarrow y = 2$ ist waagrechte Asymptote



Nach der Polynomdivision ergibt sich als ganzrationale Funktion eine konstante Funktion ($y = c$). Die Gerade $y = c$ ist dann eine waagrechte Asymptote des Graphen G_f .

Die Gleichung der waagrechten Asymptote kann auch ohne Polynomdivision am Quotienten der Koeffizienten der höchsten Potenz (im Beispiel 2:1) abgelesen werden.

c) $n = m + 1$:

Nach der Polynomdivision ergibt sich als ganzrationale Funktion eine lineare Funktion
 $y = ax + b$ (schiefe Asymptote).

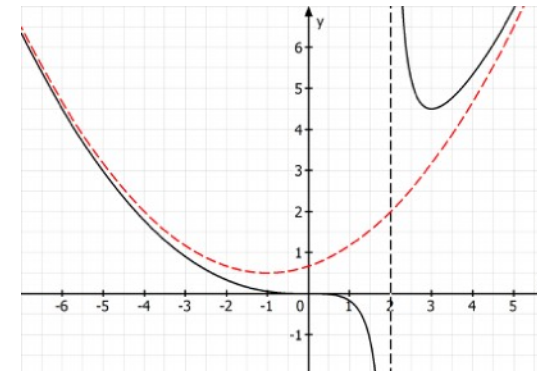
d) $n > m + 1$:

Nach der Polynomdivision ergibt sich als ganzrationale Funktion eine ganzrationale Funktion vom Grad $n - m$ (Asymptotenkurve).

Beispiel: $f(x) = \frac{x^3}{6x - 12}$

$$x^3 : (6x - 12) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} + \underbrace{\frac{8}{6x - 12}}_{\rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \pm\infty}$$

$$\Rightarrow y = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \text{ ist Asymptotenkurve}$$



Beispiel: $f(x) = \frac{0,75x^2 + x - 4}{x^2 - 4}$ $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$

Nullstellen: $f(x) = 0 \Rightarrow 0,75x^2 + x - 4 = 0 \Rightarrow x_1 \approx 1,74 \quad x_2 \approx -3,07$

Art der Definitionslücken: $x = -2$ Polstelle 1. Ordnung (mit VZW)
 $x = 2$ Polstelle 1. Ordnung (mit VZW)

Gleichungen und Art aller Asymptoten: 1) $x = -2$ senkrechte Asymptote

2) $x = 2$ senkrechte Asymptote

3) $(0,75x^2 + x - 4) : (x^2 - 4) = 0,75 + \underbrace{\frac{x-1}{x^2-4}}_{\rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \pm\infty}$

$\Rightarrow y = 0,75$ waagrechte Asymptote

Möglicher Schnittpunkt zwischen G_f und der nichtsenkrechten Asymptote:

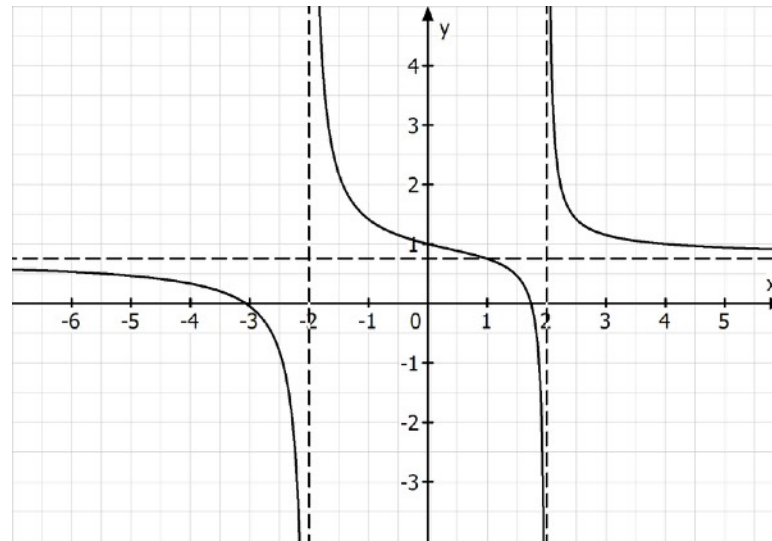
$$f(x) = 0,75 \Rightarrow 0,75 + \frac{x-1}{x^2-4} = 0,75 \Rightarrow \frac{x-1}{x^2-4} = 0 \Rightarrow x-1 = 0 \Rightarrow x = 1 \in D_f \Rightarrow \text{SP}(1|0,75)$$

Bei der Bestimmung eines möglichen Schnittpunktes zwischen Graph und nichtsenkrechter Asymptote reicht es aus, nur das Restglied zu betrachten und zu schauen, ob das Null werden kann.

Annäherung von G_f von oben oder unten an die nichtsenkrechte Asymptote für $x \rightarrow \pm\infty$: betrachte das Restglied

$$x \rightarrow -\infty \quad \Rightarrow \frac{x-1}{x^2-4} \xrightarrow{+} 0_- \quad \Rightarrow G_f \text{ nähert sich von unten an } y = 0,75 \text{ an}$$

$$x \rightarrow \infty \quad \Rightarrow \frac{x-1}{x^2-4} \xrightarrow{+} 0_+ \quad \Rightarrow G_f \text{ nähert sich von oben an } y = 0,75 \text{ an}$$



(5) Symmetrie:

Für die Symmetrie einer Funktion f gilt:

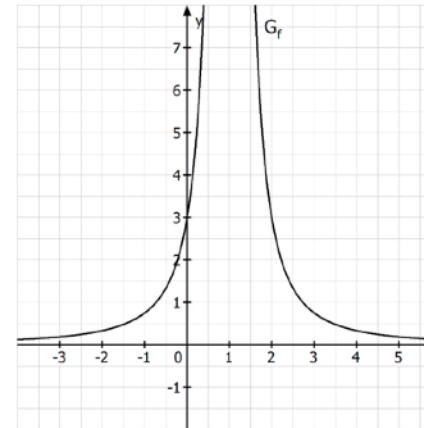
- a) Ist $f(-x) = f(x)$ für alle $x \in D$, so ist die Funktion achsensymmetrisch zur y-Achse.
- b) Ist $f(-x) = -f(x)$ für alle $x \in D$, so ist die Funktion punktsymmetrisch zum Ursprung.

Beispiele:

$$1) f(x) = \frac{3}{(x-1)^2} = \frac{3}{x^2 - 2x + 1}$$

$$f(-x) = \frac{3}{(-x)^2 - 2(-x) + 1} = \frac{3}{x^2 + 2x + 1} \neq \begin{cases} f(x) \\ -f(x) \end{cases}$$

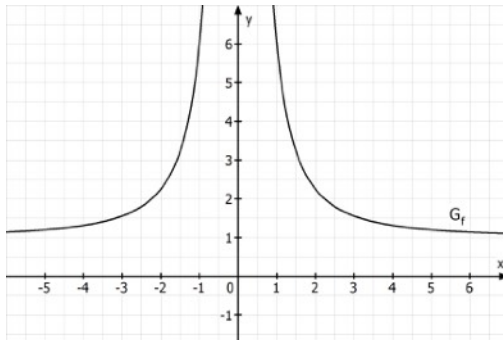
$\Rightarrow G_f$ ist weder punktsymmetrisch zum Ursprung
noch achsensymmetrisch zur y-Achse



$$2) f(x) = \frac{x^3 + 5x}{x^3}$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^3 + 5(-x)}{(-x)^3} = \frac{-x^3 - 5x}{-x^3} = \frac{x^3 + 5x}{x^3} = f(x)$$

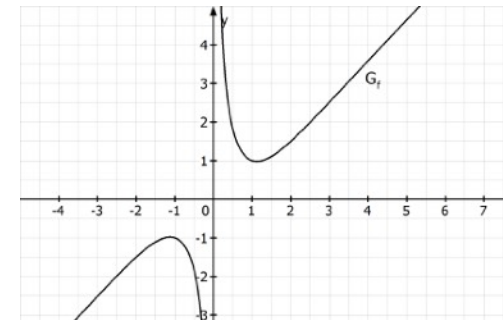
$\Rightarrow G_f$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse



$$3) f(x) = \frac{x^4 + 2}{x^3 + 2x}$$

$$f(-x) = \frac{(-x)^4 + 2}{(-x)^3 + 2(-x)} = \frac{x^4 + 2}{-x^3 - 2x} = -\frac{x^4 + 2}{x^3 + 2x} = -f(x)$$

$\Rightarrow G_f$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung



Der Graph G_f einer gebrochen-rationalen Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ ist achsensymmetrisch zur y-Achse, wenn G_p und G_q beide achsensymmetrisch zur y-Achse oder beide punktsymmetrisch zum Ursprung sind.

Der Graph G_f einer gebrochen-rationalen Funktion $f(x) = \frac{p(x)}{q(x)}$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung, wenn G_p und G_q verschiedenartiges Symmetrieverhalten aufweisen.

Weitere Ableitungsregeln

1) Die Produktregel:

Sind die Funktionen f und g an der Stelle x differenzierbar, so ist auch das Produkt $f \cdot g$ an der Stelle x differenzierbar und es gilt:

$$(f \cdot g)'(x) = f'(x) \cdot g(x) + f(x) \cdot g'(x)$$

2) Die Quotientenregel:

Sind die Funktionen f und g an der Stelle x differenzierbar und ist $g(x) \neq 0$, so ist auch der Quotient $\frac{f}{g}$ an der Stelle x differenzierbar, und es gilt:

$$\left(\frac{f}{g} \right)'(x) = \frac{f'(x) \cdot g(x) - f(x) \cdot g'(x)}{(g(x))^2}$$

3) Die Kettenregel:

Sind f an der Stelle x und g an der Stelle $f(x)$ differenzierbar, so ist die Verkettung $g \circ f (= g(f(x)))$ an der Stelle x differenzierbar, und es gilt:

$$(g \circ f)'(x) = g'(f(x)) \cdot f'(x)$$

Gegeben ist die reelle Funktion f mit $f(x) = \frac{0,5x^3}{x^2 - 4}$ mit $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.

Untersuchen Sie G_f auf Symmetrie zum Koordinatensystem.

$$f(-x) = \frac{0,5(-x)^3}{(-x)^2 - 4} = \frac{-0,5x^3}{x^2 - 4} = -f(x) \quad \Rightarrow G_f \text{ ist punktsymmetrisch zum Ursprung}$$

Alternative:

Zähler punktsymmetrisch zum Ursprung, Nenner achsensymmetrisch zur y-Achse

$\Rightarrow G_f$ ist punktsymmetrisch zum Ursprung

Berechnen Sie die Nullstelle von f .

$$f(x) = 0 \Rightarrow 0,5x^3 = 0 \Rightarrow x^3 = 0 \Rightarrow x = 0 \text{ (dreifach)}$$

Gegeben ist die reelle Funktion f mit $f(x) = \frac{0,5x^3}{x^2 - 4}$ mit $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.

Bestimmen Sie das Verhalten der Funktionswerte $f(x)$ an den Rändern der Definitionsmenge.

$$x \rightarrow -\infty \quad \frac{\overbrace{0,5x^3}^{\rightarrow -\infty}}{\underbrace{x^2 - 4}_{\rightarrow +\infty}} \rightarrow -\infty$$

$$x \rightarrow +\infty \quad \frac{\overbrace{0,5x^3}^{\rightarrow +\infty}}{\underbrace{x^2 - 4}_{\rightarrow +\infty}} \rightarrow +\infty$$

$$x \xrightarrow{<} -2 \quad \frac{\overbrace{0,5x^3}^{\rightarrow -4}}{\underbrace{x^2 - 4}_{\rightarrow 0_+}} \rightarrow -\infty$$

$$x \xrightarrow{>} -2 \quad \frac{\overbrace{0,5x^3}^{\rightarrow -4}}{\underbrace{x^2 - 4}_{\rightarrow 0_-}} \rightarrow +\infty$$

$$x \xrightarrow{<} 2 \quad \frac{\overbrace{0,5x^3}^{\rightarrow 4}}{\underbrace{x^2 - 4}_{\rightarrow 0_-}} \rightarrow -\infty$$

$$x \xrightarrow{>} 2 \quad \frac{\overbrace{0,5x^3}^{\rightarrow 4}}{\underbrace{x^2 - 4}_{\rightarrow 0_+}} \rightarrow +\infty$$

$\Rightarrow x = -2$ Polstelle mit VZW

$x = 2$ Polstelle mit VZW

Gegeben ist die reelle Funktion f mit $f(x) = \frac{0,5x^3}{x^2 - 4}$ mit $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.

Bestimmen Sie die Gleichungen und Art aller Asymptoten von G_f .

1) $x = -2$ senkrechte Asymptote

2) $x = 2$ senkrechte Asymptote

$$3) 0,5x^3 : (x^2 - 4) = 0,5x + \underbrace{\frac{2x}{x^2 - 4}}_{\rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \pm\infty} \Rightarrow y = 0,5x \text{ schiefe Asymptote}$$

Gegeben ist die reelle Funktion f mit $f(x) = \frac{0,5x^3}{x^2 - 4}$ mit $D_f = \mathbb{R} \setminus \{-2; 2\}$.

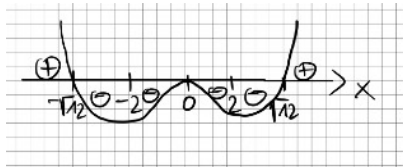
Ermitteln Sie die maximalen Monotonieintervalle von G_f und folgern Sie daraus auf die Art und Koordinaten der Extrempunkte von G_f .

$$f'(x) = \frac{1,5x^2(x^2 - 4) - 0,5x^3 \cdot 2x}{(x^2 - 4)^2} = \frac{1,5x^4 - 6x^2 - x^4}{(x^2 - 4)^2} = \frac{0,5x^4 - 6x^2}{(x^2 - 4)^2}$$

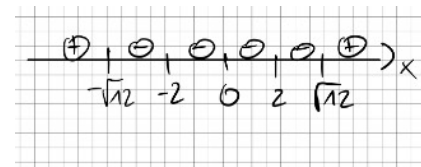
$$f'(x) = 0 \Rightarrow 0,5x^4 - 6x^2 = 0 \Rightarrow x^2(0,5x^2 - 6) = 0 \Rightarrow x_{1/2} = 0 \quad 0,5x^2 - 6 = 0 \Rightarrow x^2 = 12 \Rightarrow x_3 = -\sqrt{12} \quad x_4 = \sqrt{12}$$

Skizze von f' : Nenner immer positiv

Skizze Zähler:



VZU f' :



G_f sms in $]-\infty; -\sqrt{12}]$ sowie in $[\sqrt{12}; \infty[$ G_f smf in $[-\sqrt{12}; -2[$ sowie in $]-2; 0]$ sowie in $[0; 2[$ sowie in $]2; \sqrt{12}]$

$x = -\sqrt{12}$ HOP HOP $(-\sqrt{12}|2,60)$ $x = \sqrt{12}$ TIP TIP $(\sqrt{12}|2,60)$ ($x = 0$ kein Extrempunkt, ist Terrassenpunkt)

Bestimmen Sie die maximalen Krümmungsintervalle von G_f und ermitteln Sie die Koordinaten des Wendepunkts.

$$f'(x) = \frac{0,5x^4 - 6x^2}{(x^2 - 4)^2}$$

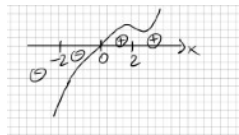
$$f''(x) = \frac{(2x^3 - 12x)(x^2 - 4)^2 - (0,5x^4 - 6x^2) \cdot 2(x^2 - 4) \cdot 2x}{(x^2 - 4)^4} = \frac{(x^2 - 4) \left[(2x^3 - 12x)(x^2 - 4) - (0,5x^4 - 6x^2) \cdot 4x \right]}{(x^2 - 4)^4}$$

$$\frac{(2x^3 - 12x)(x^2 - 4) - (0,5x^4 - 6x^2) \cdot 4x}{(x^2 - 4)^3} = \frac{2x^5 - 8x^3 - 12x^3 + 48x - 2x^5 + 24x^3}{(x^2 - 4)^3} = \frac{4x^3 + 48x}{(x^2 - 4)^3}$$

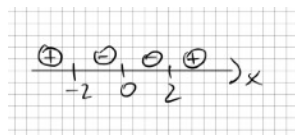
$$f''(x) = 0 \Rightarrow 4x^3 + 48x = 0 \Rightarrow x(4x^2 + 48) = 0 \Rightarrow x_1 = 0 \quad 4x^2 + 48 = 0 \quad (f)$$

Skizze von f'' :

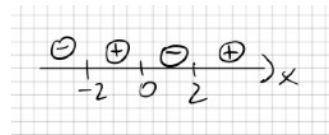
Skizze Zähler :



VZU Nenner :



VZU f'' :

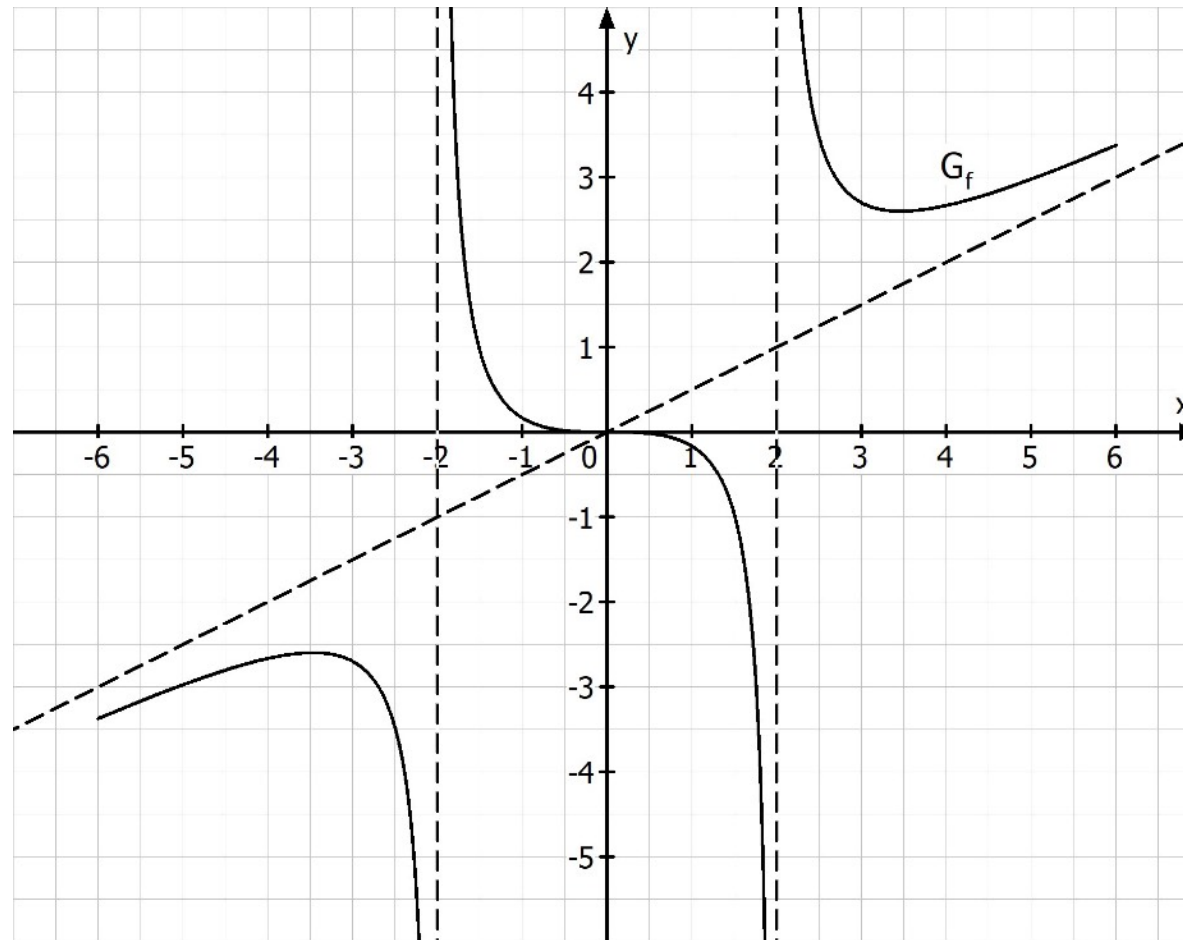


G_f rechtsgekrümmt in $]-\infty; -2[$ sowie in $[0; 2[$

G_f linksgekrümmt in $]-2; 0]$ sowie in $]2; \infty[$

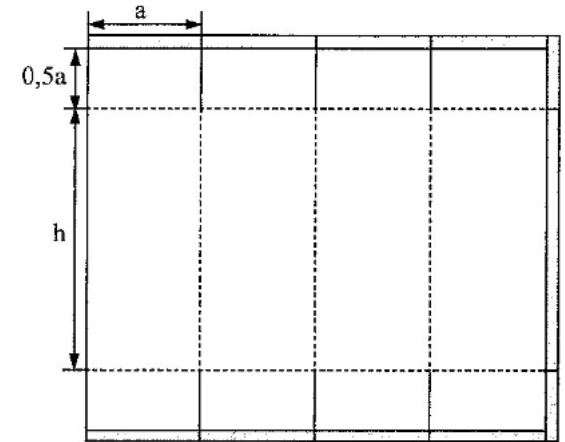
$x = 0$ WP TEP $(0|0)$

Zeichnen Sie den Graphen G_f der Funktion f unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse zusammen mit seinen Asymptoten im Bereich $-6 \leq x \leq 6$ in ein kartesisches Koordinatensystem ein.



Extremwertaufgaben

1.0 Häufig werden Getränke in quaderförmige Behälter abgefüllt, deren Grundfläche ein Quadrat mit der Seitenlänge a ist und deren Höhe mit h bezeichnet wird. Ein solcher Behälter wird aus einem rechteckigen Stück Karton, wie es nebenstehend skizziert ist, hergestellt. Zunächst wird dazu ein an beiden Enden offener Quader gefaltet. Dann werden aus den überstehenden Stücken der Boden und das Oberteil gefalzt. Aus Stabilitätsgründen werden durch den grau dargestellten Streifen der Breite 1,0 cm Überlappungen erzeugt.



Es soll ein Behälter mit dem Volumen $V = 1000 \text{ cm}^3$ hergestellt werden, für den der Materialverbrauch, d.h. der Flächeninhalt des skizzierten Kartons, minimal ist. Die Größen a und h sollen dabei die Einheit cm haben; bei den folgenden Berechnungen soll auf die Mitführung der Einheiten jedoch verzichtet werden. (Abitur 2005 AI)

1.1 Zeigen Sie, dass für den in Abhängigkeit von a dargestellten Flächeninhalt $F(a)$ des skizzierten Kartons gilt:

$$F(a) = 4a^2 + 9a + 2 + \frac{4000}{a} + \frac{1000}{a^2} \text{ mit } a \in \mathbb{R} \text{ und } a > 0$$

$$F = (4a + 1) \cdot (h + 2 \cdot 0,5a + 2 \cdot 1) = (4a + 1) \cdot (h + a + 2) \quad V = a^2 \cdot h \Rightarrow h = \frac{V}{a^2} = \frac{1000}{a^2}$$

$$\Rightarrow F(a) = (4a + 1) \cdot \left(\frac{1000}{a^2} + a + 2 \right) = \frac{4000}{a} + 4a^2 + 8a + \frac{1000}{a^2} + a + 2 = 4a^2 + 9a + 2 + \frac{4000}{a} + \frac{1000}{a^2}$$

1.2 Zeigen Sie, dass der Ansatz $\frac{dF(a)}{da} = 0$ zu folgender Gleichung führt: $8a^4 + 9a^3 - 4000a - 2000 = 0$

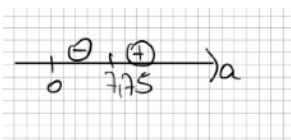
$$F(a) = 4a^2 + 9a + 2 + \frac{4000}{a} + \frac{1000}{a^2} \text{ mit } a \in \mathbb{R} \text{ und } a > 0$$

$$\frac{dF(a)}{da} = F'(a) = 8a + 9 - \frac{4000}{a^2} - \frac{2000}{a^3} \quad 8a + 9 - \frac{4000}{a^2} - \frac{2000}{a^3} = 0 \Rightarrow 8a^4 + 9a^3 - 4000a - 2000 = 0$$

1.3 Zeigen Sie unter der Annahme, dass es keine weitere positive Lösung dieser Gleichung gibt (Nachweis nicht erforderlich), dass für $a \approx 7,75$ der Flächeninhalt $F(a)$ seinen absolut kleinsten Wert annimmt. Berechnen Sie für diesen Fall auch die Höhe h des Behälters sowie die Abmessungen des skizzierten Kartons.

$$F'(a) = 0 \Rightarrow a \approx 7,75 \text{ (nach Angabe)}$$

VZU von F' :



$\Rightarrow$ relatives Minimum für $a = 7,75$

Da $F(a)$ nur einen relativen Extremwert (Minimum) besitzt, tritt keine weitere Änderung des Monotonieverhaltens auf und damit ist $a = 7,75$ absolutes Minimum.

$$h = \frac{1000}{7,75^2} \approx 16,65$$

$$\text{Abmessungen des Kartons: } l = 4 \cdot 7,75 + 1 = 32 \text{ cm} \quad b = 16,65 + 7,75 + 2 = 26,4 \text{ cm}$$

Steckbriefaufgaben

1) Die folgenden Abbildungen zeigen die Graphen von Funktionen der Form

$$f_{a,b}(x) = \frac{x^2 + a}{x + b}, \quad g_{a,b}(x) = \frac{x + a}{x^2 + b} \quad \text{oder} \quad h_{a,b}(x) = \frac{x^2 + a}{x^2 + b}.$$

Ordnen Sie die Graphen dem richtigen Typ zu und bestimmen Sie aus der Zeichnung die Werte der Parameter $a, b \in \mathbb{R}$.

(1) $g(x) = \frac{x+2}{x^2-1}$

(2) $f(x) = \frac{x^2-1}{x}$

(3) $h(x) = \frac{x^2+1}{x^2-1}$

(4) $f(x) = \frac{x^2}{x+0,5}$

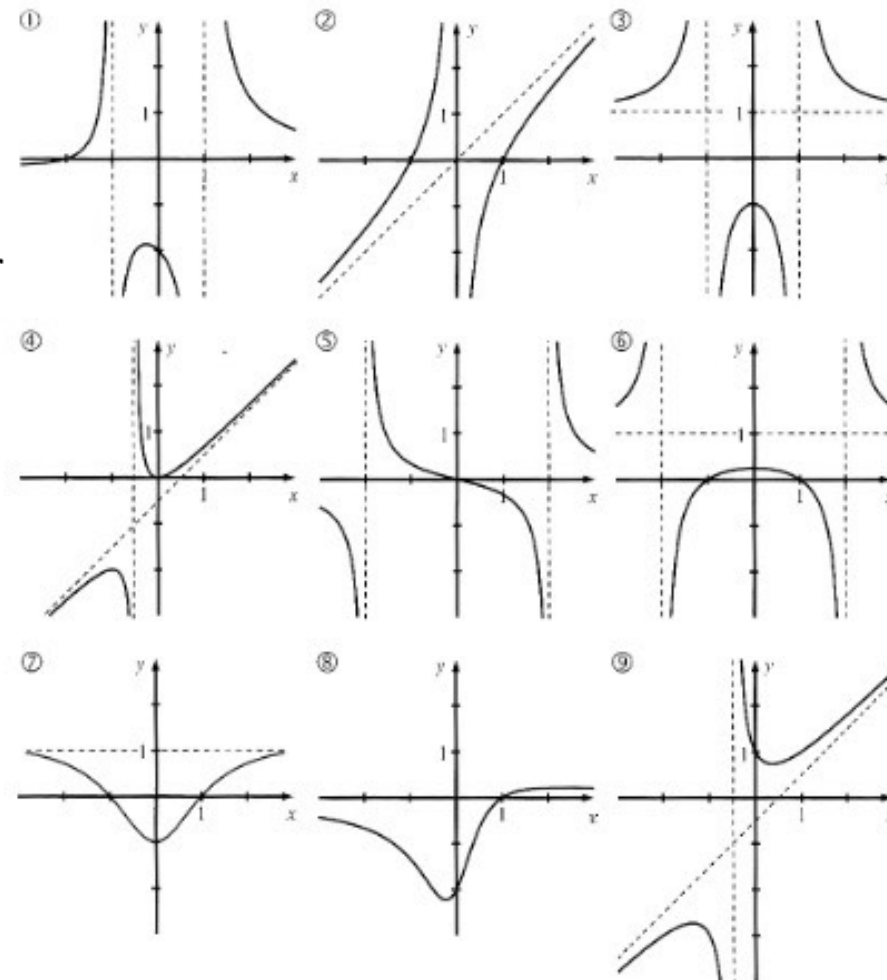
(5) $g(x) = \frac{x}{x^2-4}$

(6) $h(x) = \frac{x^2-1}{x^2-4}$

(7) $h(x) = \frac{x^2-1}{x^2+1}$

(8) $g(x) = \frac{x-1}{x^2+0,5}$

(9) $f(x) = \frac{x^2+0,5}{x+0,5}$

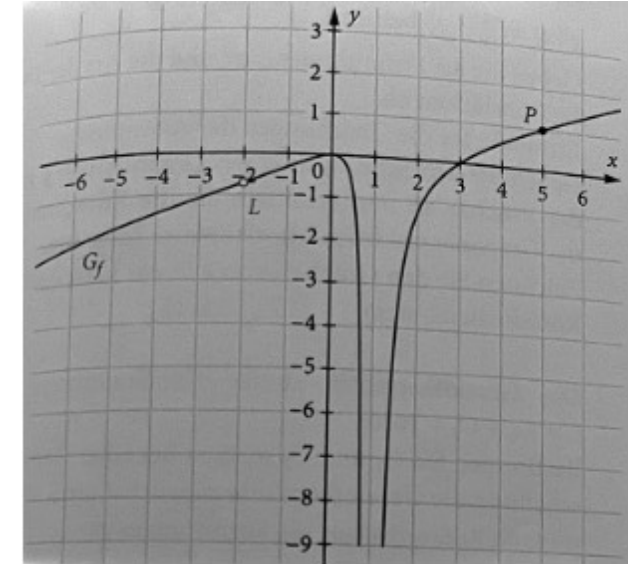


2) Ermitteln Sie einen möglichen Funktionsterm zu dem gegebenen Graphen.

Der Punkt $P(5/1)$ liegt auf dem Graphen. Die Funktion hat die Definitionslücke $L(-2/y_L)$. Die vertikale Asymptote geht durch den Punkt $V(1/-3,94785)$.

$$f(x) = a \cdot \frac{(x+2) \cdot x^2 \cdot (x-3)}{(x+2) \cdot (x-1)^2} \quad P(5/1) \text{ einsetzen: } 1 = a \cdot \frac{7 \cdot 25 \cdot 2}{7 \cdot 16} \Rightarrow a = \frac{8}{25}$$

$$f(x) = \frac{8}{25} \cdot \frac{(x+2) \cdot x^2 \cdot (x-3)}{(x+2) \cdot (x-1)^2}$$



3) Der Graph einer gebrochen-rationalen Funktion hat bei $x = 2$ eine behebbare Lücke und an der Stelle $x = 3$ eine Unendlichkeitsstelle. Die x -Achse ist Asymptote. Die x -Achse wird an der Stelle $x = 1$ geschnitten. Geben Sie zwei Funktionsgleichungen an, die diese Bedingungen erfüllen.

$$f(x) = \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x-3)^2}$$

$$g(x) = \frac{(x-2)(x-1)}{(x-2)(x-3)^3}$$

Integrale rationaler Funktionen

1. Integrale der Form $\int (ax+b)^n dx$:

Zu $f(x) = (ax+b)^n$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ ($a \neq 0$) und $n \in \mathbb{N}$ ist $F(x) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{n+1} \cdot (ax+b)^{n+1}$ eine Stammfunktion.

Aufgaben:

$$1) \int_0^1 (3x-2)^4 dx = \left[\frac{1}{5} \cdot (3x-2)^5 \cdot \frac{1}{3} \right]_0^1 = \left[\frac{1}{15} \cdot (3x-2)^5 \right]_0^1 = \frac{1}{15} - \left(-\frac{32}{15} \right) = \frac{33}{15}$$

$$2) \int_0^1 (x+1-(1-2x)^4) dx = \left[\frac{1}{2}x^2 + x - \frac{1}{5} \cdot (1-2x)^5 \cdot \left(-\frac{1}{2} \right) \right]_0^1 = \left[\frac{1}{2}x^2 + x + \frac{1}{10} \cdot (1-2x)^5 \right]_0^1 = \left(\frac{1}{2} + 1 - \frac{1}{10} \right) - \left(\frac{1}{10} \right) = \frac{13}{10}$$

2. Integrale der Form $\int \frac{1}{(ax+b)^n} dx$:

Zu $f(x) = \frac{1}{(ax+b)^n} = (ax+b)^{-n}$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ ($a \neq 0$) und $n \in \mathbb{N}$ ($n \neq 1$) ist $F(x) = \frac{1}{a} \cdot \frac{1}{-n+1} \cdot \frac{1}{(ax+b)^{n-1}}$ eine Stammfunktion.

Aufgaben:

$$1) \int_0^1 \frac{-2}{(3-2x)^2} dx = \int_0^1 [-2 \cdot (3-2x)^{-2}] dx = \left[-2 \cdot (-1) (3-2x)^{-1} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \right]_0^1 = \left[-1 \cdot (3-2x)^{-1} \right]_0^1 = -1 - \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{2}{3}$$

$$2) \int_0^1 \left(1 - \frac{3}{(5x+2)^4} \right) dx = \int_0^1 [1 - 3 \cdot (5x+2)^{-4}] dx = \left[x - 3 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) (5x+2)^{-3} \cdot \left(\frac{1}{5}\right) \right]_0^1 = \left[x + \frac{1}{5} \cdot (5x+2)^{-3} \right]_0^1 = \left(1 + \frac{1}{1715} \right) - \left(\frac{1}{40} \right) = \frac{2677}{2744}$$

3. Uneigentliche Integrale:

Die Ausdrücke $\int_a^\infty f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \infty} \int_a^b f(x)dx$ bzw. $\int_{-\infty}^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow -\infty} \int_a^b f(x)dx$ heißen uneigentliche

Integrale 1. Art, sofern die Grenzwerte existieren.

Schmiegt sich der Graph einer Funktion im Intervall $] \alpha; b]$ am linken Rand α an eine senkrechte Asymptote an, so definiert man:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{a \rightarrow \alpha^+} \int_a^b f(x)dx$$

Schmiegt sich der Graph einer Funktion im Intervall $[a; \beta [$ am rechten Rand β an eine senkrechte Asymptote an, so definiert man:

$$\int_a^b f(x)dx = \lim_{b \rightarrow \beta^-} \int_a^b f(x)dx$$

Sofern der Grenzwert jeweils existiert, heißt er uneigentliches Integral 2. Art.

Aufgaben:

$$1) \int_1^{\infty} \frac{dx}{(x+2)^2} = \int_1^b (x+2)^{-2} dx = \left[-(x+2)^{-1} \right]_1^b = -\frac{1}{b+2} - \left(-\frac{1}{1+2} \right) = \frac{1}{3} - \frac{1}{b+2}$$

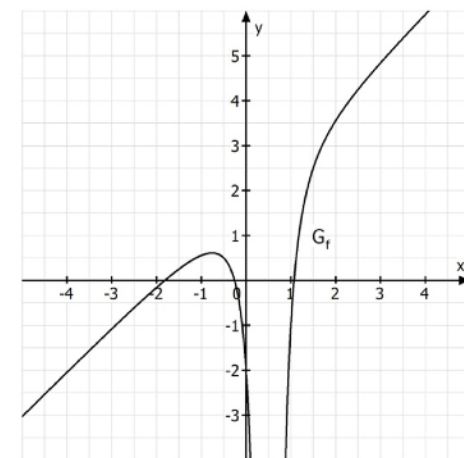
$$b \rightarrow \infty \quad \frac{1}{3} - \underbrace{\frac{1}{b+2}}_{\rightarrow 0} \rightarrow \frac{1}{3}$$

$$2) \int_0^4 \frac{1}{x^2} dx = \int_a^4 \frac{1}{x^2} dx = \int_a^4 x^{-2} dx = \left[-x^{-1} \right]_a^4 = -\frac{1}{4} - \left(-\frac{1}{a} \right) = \frac{1}{a} - \frac{1}{4}$$

$$a \rightarrow 0^+ \quad \underbrace{\frac{1}{a}}_{\rightarrow +\infty} - \frac{1}{4} \rightarrow \infty$$

3.0 Gegeben ist die reelle Funktion $f(x) = \frac{4x^3 + 4x^2 - 7x - 2}{(2x-1)^2}$ in ihrer maximalen Definitionsmenge D_f

und der zugehörige Graph der Funktion f im abgebildeten Diagramm.

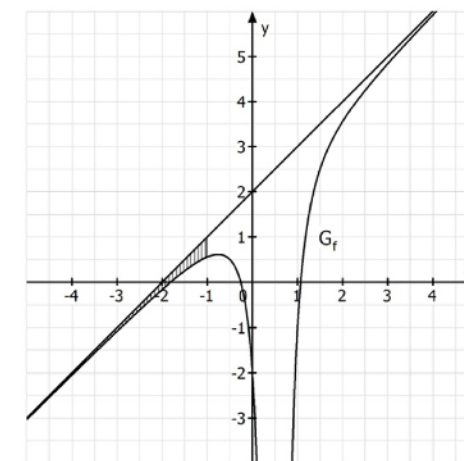


3.1 Der Graph von f , seine nichtsenkrechte Asymptote und die Geraden mit den Gleichungen $x = -1$ und $x = a$ mit $a < -1$ schließen im II. und III. Quadranten ein Flächenstück ein. Kennzeichnen Sie dieses Flächenstück und berechnen Sie die Maßzahl dieser Fläche $A(a)$ in Abhängigkeit von $a \in \mathbb{R}$.

$$(4x^3 + 4x^2 - 7x - 2) : (4x^2 - 4x + 1) = x + 2 + \underbrace{\frac{-4}{(2x-1)^2}}_{\rightarrow 0 \text{ für } x \rightarrow \pm\infty} \Rightarrow \text{Asymptote: } y = x + 2$$

$$\int_a^{-1} \left[(x+2) - \left(x+2 - \frac{4}{(2x-1)^2} \right) \right] dx = \int_a^{-1} \left[\frac{4}{(2x-1)^2} \right] dx = \int_a^{-1} \left[4 \cdot (2x-1)^{-2} \right] dx = \left[4 \cdot (-1) \cdot (2x-1)^{-1} \cdot \frac{1}{2} \right]_a^{-1}$$

$$= \left[-2 \cdot (2x-1)^{-1} \right]_a^{-1} = \left[-2 \cdot (-3)^{-1} \right] - \left[-2 \cdot (2a-1)^{-1} \right] \Rightarrow A(a) = \frac{2}{3} + \frac{2}{2a-1}$$



3.2 Berechnen Sie die Maßzahl der Fläche für $a = -4$.

$$A(-4) = \frac{2}{3} + \frac{2}{-9} = \frac{4}{9}$$

3.3 Untersuchen Sie, ob die sich ins $-\infty$ -Unendliche erstreckende Fläche messbar ist und bestimmen Sie gegebenenfalls dessen Wert.

$$a \rightarrow -\infty \quad \frac{2}{3} + \underbrace{\frac{2}{2a-1}}_{\rightarrow 0} \rightarrow \frac{2}{3}$$

Die Fläche ist messbar und beträgt $\frac{2}{3}$.